УДК 517.97

А. А. Ковалевский

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ Г-СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Устанавливаются необходимые и достаточные условия Г-сходимости интегральных функционалов $I_{\lambda,s}: W^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ к интегральным функционалам $I_\lambda: W^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей, содержащихся в Ω, $m > 1$, $k \in \mathbb{N}$, λ — открытое множество, $\lambda \subset \Omega$ и $\operatorname{mes} \partial\lambda = 0$. Эти условия формулируются в терминах поточечной сходимости некоторых функций, построенных по интегрантам и областям интегрирования исходных функционалов. При некотором предположении относительно областей Ω_s формулируется критерий Г-сходимости рассматриваемых функционалов.

1. Понятие Г-сходимости функционалов играет важную роль при изучении сходимости решений вариационных задач (см., например, [1—5]). В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на различных соболевских пространствах. Эти условия формулируются в терминах поточечной сходимости некоторых функций, построенных по интегрантам и областям интегрирования исходных функционалов. Результаты статьи являются развитием результатов, изложенных в [6].

Исходные предположения данной работы таковы: $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω; $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$; $k \in \mathbb{N}$.

Далее понадобятся отображения q_s, которые определяются следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение $W^{k,m}(\Omega)$ в $W^{k,m}(\Omega_s)$, такое, что для любого $u \in W^{k,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Приведем теперь используемое в работе определение Г-сходимости функционалов, заданных на пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$.

Определение. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s — функционал на $W^{k,m}(\Omega_s)$, I — функционал на $W^{k,m}(\Omega)$. Назовем последовательность $\{I_s\}$ Г-сходящейся к функционалу I, если:

а) из $u \in W^{k,m}(\Omega)$ следует, что существует последовательность $\{w_s\}$, такая, что $\forall s \in \mathbb{N}$ $w_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$,

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s - q_s u \|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u);$$

б) из $u \in W^{k,m}(\Omega)$, $\quad \forall s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$, $\quad \lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0$ следует, что $\varliminf\limits_{s\to\infty} I_s(u_s) \geqslant I(u)$.

Это определение является частным случаем общего определения Г-сходимости функционалов, заданных на различных банаховых пространствах [4].

2. Введем обозначения: $P'_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : |\alpha| \leqslant k-1\}$, $P''_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : |\alpha| = k\}$, $\mathbb{R}'_{n,k}$ ($\mathbb{R}''_{n,k}$) — пространство всех отображений $P'_{n,k}$ ($P''_{n,k}$) в $\mathbb{R}$; если $\xi \in \mathbb{R}'_{n,k}$, $\eta \in \mathbb{R}''_{n,k}$, то

$$|\xi| = \left(\sum_{\alpha \in P'_{n,k}} \xi^2_\alpha \right)^{1/2}, \quad |\eta| = \left(\sum_{\alpha \in P''_{n,k}} \eta^2_\alpha \right)^{1/2};$$

если G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{k,m}(G)$, то $\delta_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}'_{n,k}$, такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P'_{n,k}$ $(\delta_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$; $\nabla_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}''_{n,k}$, такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P''_{n,k}$ $(\nabla_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть теперь $c \geqslant 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ f_s — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^{n}_{n,k}$ и $\tau \in [0, 1]$

$$c^{-1} |\eta|^m - c \leqslant f_s(x, \eta) \leqslant c(|\eta|^m + 1), \tag{1}$$

$$f_s(x, \tau\eta + (1-\tau)\eta') \leqslant \tau f_s(x, \eta) + (1-\tau) f_s(x, \eta'). \tag{2}$$

Пусть $\mathscr{F}$ — множество всех каратеодориевских функций f на $\Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$, удовлетворяющих условию: при почти всех $x \in \Omega$ и любых $\eta \in \mathbb{R}^{n}_{n,k}$

$$-c \leqslant f(x, \eta) \leqslant c(|\eta|^m + 1). \tag{3}$$

Обозначим через Λ совокупность всех непустых открытых множеств λ в $\mathbb{R}^n$, таких, что $\lambda \subset \Omega$, $\operatorname{mes} \partial\lambda = 0$, и определим интегральные функционалы на пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$, $W^{k,m}(\Omega)$. Если $\lambda \in \Lambda$, $s \in \mathbb{N}$, то $I_{\lambda,s}$ — функционал на $W^{k,m}(\Omega_s)$, такой, что для любого $u \in W^{k,m}(\Omega_s)$

$$I_{\lambda,s}(u) = \int_{\lambda \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k u)\, dx;$$

если $f \in \mathscr{F}$, $\lambda \in \Lambda$, то I^f_λ — функционал на $W^{k,m}(\Omega)$, такой, что для любого $u \in W^{k,m}(\Omega)$

$$I^f_\lambda(u) = \int_\lambda f(x, \nabla_k u)\, dx$$

Основные результаты работы описывают необходимые и достаточные условия Г-сходимости последовательностей $\{I_{\lambda,s} : s \in \mathbb{N}\}$ к функционалам I^f_λ. Для формулировки этих условий понадобятся специально определенные функции. Они рассматриваются в следующем пункте.

3. Введем сначала ряд вспомогательных множеств и чисел. Пусть Q — куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и ребрами длины 1, ориентированными по координатным осям, и пусть для $y \in \mathbb{R}^n$ $t \in \mathbb{N}$ $Q_t(y) = y + t^{-1} Q$; для t, r, $s \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$

$$V_{t,r,s}(y) = \left\{ u \in W^{k,m}(\Omega_s) : \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\delta_k u|^m dx \leqslant \frac{1}{rt^n} \right\};$$

для $t, r, s \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}_{n,k}$

$$F_{t,r,s}(y, \eta) = t^n \inf_{u \in V_{t,r,s}(y)} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \eta + \nabla_k u)\, dx.$$

Из (1) следует, что для $t, r, s \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$

$$-c \leqslant F_{t,r,s}(y, \eta) \leqslant c(|\eta|^m + 1). \tag{4}$$

Пусть для $t, r \in \mathbb{N}$, $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$

$$F'_{t,r}(y, \eta) = \varliminf_{s \to \infty} F_{t,r,s}(y, \eta), \quad F''_{t,r}(y, \eta) = \varlimsup_{s \to \infty} F_{t,r,s}(y, \eta).$$

Заметим, что если t, r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, причем $r_1 \leqslant r_2$, и $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$, то

$$F'_{t,r_1}(y, \eta) \leqslant F'_{t,r_2}(y, \eta), \quad F''_{t,r_1}(y, \eta) \leqslant F''_{t,r_2}(y, \eta). \tag{5}$$

Эти неравенства являются следствием включений

$$V_{t,r_2,s}(y) \subset V_{t,r_1,s}(y), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Пусть теперь для $t \in \mathbb{N}$ F'_t, F''_t — функции на $\Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$, такие, что $\forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n}_{n,k}$

$$F'_t(y, \eta) = \sup_r F'_{t,r}(y, \eta), \quad F''_t(y, \eta) = \sup_r F''_{t,r}(y, \eta).$$

Отметим, что в силу свойств функций f_s

$$\{F'_t\}, \{F''_t\} \subset \mathscr{F}, \tag{6}$$

для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^{''}_{n,k}$, $\tau \in [0, 1]$

$$F_t''(y, \tau\eta + (1-\tau)\eta') \leqslant \tau F_t''(y, \eta) + (1-\tau) F_t''(y, \eta'). \tag{7}$$

4. В этом пункте устанавливается, что сходимость последовательностей $\{F_t'\}$ и $\{F_t''\}$ сопровождается Γ-сходимостью последовательностей $\{I_{\lambda,s} : s \in \mathbb{N}\}$.

Введем такие обозначения: если $t \in \mathbb{N}$, то $Y_t = \{y \in \mathbb{R}^n : \ ty_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n\}$; если $\lambda \in \Lambda$, $t \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^n$, то $Y_{t,z}(\lambda) = \{y \in Y_t : \overline{Q_t(y+z)} \cap \cap \lambda \neq \varnothing\}$, $Y'_{t,z}(\lambda) = \{y \in Y_t : Q_t(y+z) \subset \lambda\}$; если Y — конечное множество, то $|Y|$ — число его элементов.

Теорема 1. Пусть f — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^{''}_{n,k}$, $E \subset \Omega$, $\operatorname{mes} E = 0$, последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к f на $(\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}^{''}_{n,k}$. Тогда $f \in \mathcal{F}$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Γ-сходится к функционалу I_λ^f.

Доказательство. В силу (6), (7) и условия теоремы $f \in \mathcal{F}$ и $\forall y \in \Omega \setminus E$ функция $f(y, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^{''}_{n,k}$.

Пусть $\lambda \in \Lambda$, $u \in W^{k,m}(\Omega)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и функцию $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, такую, что

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,m}(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Пусть, далее,

$$b_\varepsilon = \sup_{x\in\Omega}\left\{\sum_{k\leqslant|\alpha|\leqslant k+1} |D^\alpha u^\varepsilon(x)|\right\} + 1, \quad c_\varepsilon = \min\left\{\varepsilon b_\varepsilon^{-m}, \frac{1}{3}\operatorname{mes}\lambda\right\},$$

F^ε — функция на Ω, такая, что $\forall x \in \Omega$ $F^\varepsilon(x) = f(x, \nabla_k u^\varepsilon(x))$. Так как $f \in \mathcal{F}$, то $F^\varepsilon \in L^1(\Omega)$ и при почти всех $x \in \Omega$

$$|F^\varepsilon(x)| \leqslant c b_\varepsilon^m. \tag{9}$$

Тогда существует функция $\tilde{F}^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, такая, что

$$\|\tilde{F}^\varepsilon - F^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{3} c_\varepsilon^2, \quad |\tilde{F}^\varepsilon| \leqslant c b_\varepsilon^m \text{ на } \Omega. \tag{10}$$

Введем теперь функции M_t, $\tilde{M}_t$. Если $t \in \mathbb{N}$, то M_t, $\tilde{M}_t$ такие функции на Ω, что $\forall x \in \Omega$

$$M_t(x) = |F^\varepsilon(x) - F_t'(x, \nabla_k u^\varepsilon(x))| + |F^\varepsilon(x) - F_t''(x, \nabla_k u^\varepsilon(x))|,$$

$$\tilde{M}_t(x) = |\tilde{F}^\varepsilon(x) - F_t'(x, \nabla_k u^\varepsilon(x))| + |\tilde{F}^\varepsilon(x) - F_t''(x, \nabla_k u^\varepsilon(x))|.$$

Наконец, положим для любых $t \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^n$

$$Y_{t,z}^\varepsilon = \{y \in Y_t : y + z \in \Omega, \quad \tilde{M}_t(y+z) \geqslant c_\varepsilon\}.$$

Докажем следующее утверждение:

$$\text{существует такое } t_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ что при любом } t \in \mathbb{N},\ t \geqslant t_\varepsilon, \atop \text{найдется } z \in Q_t(0), \text{ для которого } |Y_{t,z}^\varepsilon| \leqslant c_\varepsilon t^n. \tag{11}$$

Прежде всего заметим, что $\{M_t\}$, $\{\tilde{M}_t\} \subset L^1(\Omega)$ и в силу условия теоремы последовательность $\{M_t\}$ сходится к нулю почти всюду на Ω. Кроме того, в силу (4) и (9) при любом $t \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in \Omega$ $M_t(x) \leqslant 4cb_\varepsilon^m$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{t\to\infty} \|M_t\|_{L^1(\Omega)} = 0. \tag{12}$$

Заметим теперь, что $\forall t \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{M}_t\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|M_t\|_{L^1(\Omega)} + 2\|\tilde{F}^\varepsilon - F^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}.$$

Используя это неравенство, а также равенство (12) и первое из неравенств (10), получаем: существует $t_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\forall t \in \mathbb{N}, t \geqslant t_\varepsilon, \ \|\tilde{M}_t\|_{L^1(\Omega)} \leqslant c_\varepsilon^2. \qquad (13)$$

Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_\varepsilon$, и предположим, что

$$\forall z \in Q_t(0) \quad |Y^\varepsilon_{t,z}| > c_\varepsilon t^n. \qquad (14)$$

Обозначив через $\mathscr{M}_t$ продолжение функции $\tilde{M}_t$ нулем на $\mathbb{R}^n$, получим

$$\|\tilde{M}_t\|_{L^1(\Omega)} = \int\limits_{Q_t(0)} \left(\sum_{y \in Y_{t,0}(\Omega)} \mathscr{M}_t(y+z) \right) dz. \qquad (15)$$

Но для $z \in Q_t(0)$ $Y^\varepsilon_{t,z} \subset Y_{t,0}(\Omega)$ и, следовательно,

$$\sum_{y \in Y_{t,0}(\Omega)} \mathscr{M}_t(y+z) \geqslant \sum_{y \in Y^\varepsilon_{t,z}} \tilde{M}_t(y+z) \geqslant c_\varepsilon |Y^\varepsilon_{t,z}|.$$

Из этого неравенства и предположения (14) вытекает, что $\sum\limits_{y \in Y_{t,0}(\Omega)} \mathscr{M}_t(y+z) > c_\varepsilon^2 t^n$. Отсюда и из (15) получаем неравенство $\|\tilde{M}_t\|_{L^1(\Omega)} > c_\varepsilon^2$, которое противоречит (13). Следовательно, предположение (14) не верно и найдется $z \in Q_t(0)$, для которого $|Y^\varepsilon_{t,z}| \leqslant c_\varepsilon t^n$. Тем самым предположение (11) доказано.

Пусть $B(x^0, \rho)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x^0 и радиусом ρ, содержащийся в λ; $b'_\varepsilon = \sup\limits_{x \in \Omega} |\nabla \tilde{F}^\varepsilon(x)|$; для любого $i \in \mathbb{N}$

$$\lambda'(i) = \left\{ x \in \lambda : d(x, \partial\lambda) \geqslant \frac{1}{i} \right\}, \quad \lambda''(i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, \lambda) \leqslant \frac{1}{i} \right\}.$$

Имеем $\lim\limits_{i \to \infty} \operatorname{mes} \lambda'(i) = \operatorname{mes} \lambda$, $\lim\limits_{i \to \infty} \operatorname{mes} \lambda''(i) = \operatorname{mes} \bar{\lambda}$. Кроме того, $\operatorname{mes} \partial\lambda = 0$. Из этих равенств получаем: существует такое $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$\operatorname{mes}(\lambda''(i_\varepsilon) \setminus \lambda'(i_\varepsilon)) \leqslant c_\varepsilon. \qquad (16)$$

Положим $t'_\varepsilon = \max(t_\varepsilon, n\rho^{-1}, ni_\varepsilon, n\varepsilon^{-1} b'_\varepsilon \operatorname{mes} \lambda, \varepsilon^{-1} b^m_\varepsilon)$ и зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t'_\varepsilon$. В силу предложения (11) существует такое $z \in Q_t(0)$, что

$$|Y^\varepsilon_{t,z}| \leqslant c_\varepsilon t^n. \qquad (17)$$

При этом $Y'_{t,z}(\lambda) \neq \varnothing$,

$$|Y_{t,z}(\lambda) \setminus Y'_{t,z}(\lambda)| \leqslant c_\varepsilon t^n, \quad Y'_{t,z}(\lambda) \setminus Y^\varepsilon_{t,z} \neq \varnothing, \qquad (18)$$

$$\left| \int\limits_\lambda F^\varepsilon dx - \sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} \tilde{F}^\varepsilon(y+z) t^{-n} \right| \leqslant (c+1)\varepsilon. \qquad (19)$$

Действительно, при некотором $y \in Y_t$ $x^0 \in \overline{Q_t(y+z)}$. Тогда для любого $x \in Q_t(y+z)$ $|x - x^0| \leqslant \frac{n}{t} \leqslant \rho$. Значит, $x \in B(x^0, \rho) \subset \lambda$ и, следовательно, $Q_t(y+z) \subset \lambda$. Тогда $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$ и, значит, $Y'_{t,z}(\lambda) \neq \varnothing$. Используя неравенство $t \geqslant ni_\varepsilon$, получаем

$$\bigcup_{y \in Y_{t,z}(\lambda) \setminus Y'_{t,z}(\lambda)} \overline{Q_t(y+z)} \subset \lambda''(i_\varepsilon) \setminus \lambda'(i_\varepsilon).$$

Отсюда и из (16) выводим первое из неравенств (18). Если предположить, что $Y'_{t,z}(\lambda) \setminus Y^\varepsilon_{t,z} = \varnothing$, то получим $Y'_{t,z}(\lambda) \subset Y^\varepsilon_{t,z}$, и тогда с учетом (17) будем иметь $|Y'_{t,z}(\lambda)| \leqslant c_\varepsilon t^n$. Используя это неравенство и первое из (18), находим $\operatorname{mes} \lambda \leqslant t^{-n} |Y'_{t,z}(\lambda)| + t^{-n} |Y_{t,z}(\lambda) \setminus Y'_{t,z}(\lambda)| \leqslant 2c_\varepsilon \leqslant \frac{2}{3} \operatorname{mes} \lambda$.

Установленное противоречие доказывает справедливость второго из неравенств (18). Докажем неравенство (19). Легко видеть, что

$$\int\limits_{\lambda} F^{\varepsilon} dx - \sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} \tilde{F}^{\varepsilon}(y+z)\, t^{-n} = \int\limits_{\lambda} (F^{\varepsilon} - \tilde{F}^{\varepsilon})\, dx +$$

$$+ \sum_{y \in Y_{t,z}(\lambda) \setminus Y'_{t,z}(\lambda)} \int\limits_{Q_t(y+z) \cap \lambda} \tilde{F}^{\varepsilon} dx + \sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} \int\limits_{Q_t(y+z)} (\tilde{F}^{\varepsilon}(x) - \tilde{F}^{\varepsilon}(y+z))\, dx.$$

Отсюда, используя неравенства (10), первое из (18), неравенство $t \geqslant \geqslant n\varepsilon^{-1} b'_{\varepsilon} \operatorname{mes} \lambda$, получаем (19).

Положим для любого $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$ $\eta^y = \nabla_k u^{\varepsilon}(y+z)$. Используя (4), (10), (17), (19) и определение множества $Y^{\varepsilon}_{t,z}$, устанавливаем

$$\sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} F'_t(y+z,\ \eta^y)\, t^{-n} \geqslant \int\limits_{\lambda} F^{\varepsilon} dx - (3c + 1 + \operatorname{mes} \lambda)\, \varepsilon, \tag{20}$$

$$\sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} F''_t(y+z,\ \eta^y)\, t^{-n} \leqslant \int\limits_{\lambda} F^{\varepsilon} dx + (3c + 1 + \operatorname{mes} \lambda)\, \varepsilon. \tag{21}$$

Используя выпуклость функций $f(y, \cdot)$ при почти всех $y \in \Omega$, оценку для значений f, справедливую в силу включения $f \in \mathcal{F}$ и (8), получаем

$$\left| \int\limits_{\lambda} F^{\varepsilon} dx - I^f_{\lambda}(u) \right| \leqslant 4^m \,|P''_{n,k}|^m c\, (\operatorname{mes} \lambda + 2 + \|u\|^m_{W^{k,m}(\Omega)})\, \varepsilon. \tag{22}$$

Из (20) — (22) находим

$$\sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} F'_t(y+z,\ \eta^y)\, t^{-n} \geqslant I^f_{\lambda}(u) - c'\varepsilon, \tag{23}$$

$$\sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} F''_t(y+z,\ \eta^y)\, t^{-n} \leqslant I^f_{\lambda}(u) + c'\varepsilon, \tag{24}$$

где $c' = (4\mu)^m c\, (6 + 2 \operatorname{mes} \lambda + \|u\|^m_{W^{k,m}(\Omega)})$, $\quad \mu = |P'_{n,k}| + |P''_{n,k}|$.

Далее по определению функции F'_t и (5) существует такое $r_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, что для любых $r \geqslant r_{\varepsilon}$ и $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$

$$F'_{t,r}(y+z,\ \eta^y) \geqslant F'_t(y+z,\ \eta^y) - \varepsilon. \tag{25}$$

Зафиксируем $r \geqslant \max(r_{\varepsilon}, t^{2km+m})$. Ясно, что существует такое $s' \in \mathbb{N}$, что для любых $s \geqslant s'$ и $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$

$$F_{t,r,s}(y+z,\ \eta^y) \geqslant F'_{t,r}(y+z,\ \eta^y) - \varepsilon. \tag{26}$$

Пусть теперь $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$, причем

$$\lim_{s \to \infty} \|u_s - q_s u\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0, \ \sup_s \|\nabla_k u_s\|_{L^m(\lambda \cap \Omega_s)} < \infty. \tag{27}$$

Положим $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s = u_s - q_s u$. В силу первого из соотношений (27) существует такое $s'' \in \mathbb{N}$, что для любых $s \geqslant s''$ и $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$

$$v_s \in V_{t,r,s}(y+z). \tag{28}$$

Возьмем $s \geqslant \max(s', s'')$. Используя (28), (26), (25) и (23), устанавливаем

$$\sum_{y \in Y'_{t,z}(\lambda)} \int\limits_{Q_t(y+z) \cap \Omega_s} f_s(x,\ \eta^y + \nabla_k v_s)\, dx \geqslant I^f_{\lambda}(u) - (c' + 2 \operatorname{mes} \lambda)\, \varepsilon. \tag{29}$$

Но в силу (2), (1) и неравенства $t \geqslant \varepsilon^{-1} b_{\varepsilon}$ для любого $y \in Y'_{t,z}(\lambda)$ и почти всех $x \in Q_t(y+z) \cap \Omega_s$ имеем

$$f_s(x,\ \eta^y + \nabla_k v_s(x)) = f_s(x,\ \nabla_k u_s(x) + \nabla_k (u^{\varepsilon} - u)(x) + \nabla_k u^{\varepsilon}(y+z) -$$

$$- \nabla_k u^{\varepsilon}(x)) \leqslant (1-\varepsilon) f_s(x,\ \nabla_k u_s(x)) + \varepsilon f_s(x,\ \nabla_k u_s(x) + \varepsilon^{-1} \nabla_k (u^{\varepsilon} - u)(x) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} (\nabla_k u^{\varepsilon}(y+z) - \nabla_k u^{\varepsilon}(x))) \leqslant f_s(x,\ \nabla_k u_s(x)) + 3^m c\varepsilon\, |\nabla_k u_s(x)|^m +$$

$$+ 3^m c \varepsilon^{1-m} |\nabla_k (u^{\varepsilon} - u)(x)|^m + 3^{m+1} \mu^m c\varepsilon.$$

Тогда, используя (1), первое из неравенств (18) и (8), получаем

$$\sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} \int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x,\ \eta^y + \nabla_k v_s)\,dx \leqslant I_{\lambda,s}(u_s) + $$
$$+ 3^{m+1}\mu^m c\varepsilon\,(1 + \operatorname{mes}\lambda + \|\nabla_k u_s\|^m_{L^m(\lambda\cap\Omega_s)}).$$

Отсюда и из (29) находим

$$I_{\lambda,s}(u_s) \geqslant I^f_\lambda(u) - 5c'\,(1 + \|\nabla_k u_s\|^m_{L^m(\lambda\cap\Omega_s)})\varepsilon\ (s \geqslant \max(s',\ s'')). \tag{30}$$

Пусть для любых $s\in\mathbb{N}$ и $y\in Y'_{t,z}(\lambda)$

$$u_{s,y}\in V_{t,r,s}(y+z), \tag{31}$$

причем

$$\int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x,\ \eta^y + \nabla_k u_{s,y})\,dx \leqslant t^{-n} F_{t,r,s}(y+z,\ \eta^y) + \varepsilon t^{-n}. \tag{32}$$

Ясно, что существует такое $s'_t\in\mathbb{N}$, что для любых $s\geqslant s'_t$ и $y\in Y'_{t,z}(\lambda)$

$$F_{t,r,s}(y+z,\ \eta^y) \leqslant F''_{t,r}(y+z,\ \eta^y) + \varepsilon. \tag{33}$$

Для произвольного $s\geqslant s'_t$, используя (32), (33) и (24), получаем неравенство

$$\sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} \int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x,\ \eta^y + \nabla_k u_{s,y})\,dx \leqslant I^f_\lambda(u) + (c' + 2\operatorname{mes}\lambda)\,\varepsilon, \tag{34}$$

а используя (32), (1), (4), (8) и неравенство $t\geqslant\varepsilon^{-1}b_\varepsilon$, устанавливаем

$$\sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} \int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} |\eta^y + \nabla_k u_{s,y}|^m\,dx \leqslant cc'. \tag{35}$$

Пусть еще для любого $y\in Y'_{t,z}(\lambda)$ φ_y — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям: $0\leqslant\varphi_y\leqslant 1$ на $\mathbb{R}^n$, $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+1}(y+z)$, $\varphi_y = 0$ вне $Q_t(y+z)$, $\forall\alpha\in P'_{n,k}\cup P''_{n,k}\ |D^\alpha\varphi_y| \leqslant Ct^{2|\alpha|}$ на $\mathbb{R}^n$. За сужением функции φ_y на Ω сохраним то же обозначение. Пусть теперь для любого $s\in\mathbb{N}$

$$v^t_s = q_s u + \sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} u_{s,y} q_s \varphi_y.$$

Тогда для любого $s\in\mathbb{N}$ $v^t_s\in W^{k,m}(\Omega_s)$, и в силу свойств функций φ_y, включения (31) и неравенства $r\geqslant t^{2km+m}$

$$\|v^t_s - q_s u\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \leqslant c'' t^{-1}, \tag{36}$$

где $c'' = C\mu\,(\mu\operatorname{mes}\lambda)^{\frac{1}{m}}(k!)^n$. Зафиксируем $s\geqslant s'_t$ и получим оценку сверху для $I_{\lambda,s}(v^t_s)$. Используя свойства функций φ_y, неравенства (1), (8) и первое из (18), устанавливаем, что

$$I_{\lambda,s}(v^t_s) \leqslant \sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} \int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x,\ \nabla_k v^t_s)\,dx + (2+2\mu)^m c\varepsilon. \tag{37}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части (37). Пусть $y\in Y'_{t,z}(\lambda)$, $g_{s,y}$ — отображение Ω_s в $\mathbb{R}''_{n,k}$, такое, что для любых $x\in\Omega_s$ и $\alpha\in P''_{n,k}$

$$(g_{s,y}(x))_\alpha = \sum_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u_{s,y}(x)\, D^{\alpha-\beta}\varphi_y(x)$$

(здесь $\binom{\alpha}{\beta} = (\beta!\,(\alpha-\beta)!)^{-1}\,\alpha!$). Заметим, что в силу неравенства для производных функции φ_y, а также (31) и неравенства $r\geqslant t^{2km+m}$,

$$\int_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} |g_{s,y}|^m\,dx \leqslant [C\mu^2(k!)^n]^m\, t^{-m-n}. \tag{38}$$

Для почти всех $x \in Q_t(y+z) \cap \Omega_s$ имеем:

$$\nabla_k v_s^t(x) = \eta^y + \varphi_y(x)\nabla_k u_{s,y}(x) + \nabla_k(u - u^\varepsilon)(x) + \nabla_k u^\varepsilon(x) -$$
$$- \nabla_k u^\varepsilon(y+z) + g_{s,y}(x).$$

Тогда для этих x в силу (1), (2) и неравенства $t \geqslant \varepsilon^{-1} b_\varepsilon$

$$f_s(x, \nabla_k v_s^t(x)) \leqslant (1-\varepsilon) f_s(x, \eta^y + \varphi_y(x)\nabla_k u_{s,y}(x)) +$$
$$+ \varepsilon f_s(x, \eta^y + \varphi_y(x)\nabla_k u_{s,y}(x) + \varepsilon^{-1}\nabla_k(u-u^\varepsilon)(x) +$$
$$+ \varepsilon^{-1}(\nabla_k u^\varepsilon(x) - \nabla_k u^\varepsilon(y+z)) + \varepsilon^{-1} g_{s,y}(x)) \leqslant f_s(x, \eta^y + \nabla_k u_{s,y}(x)) +$$
$$+ (2 + 10^m \mu^m) c\varepsilon + 2c(1-\varphi_y(x)) b_\varepsilon^m + 5^m c\varepsilon |\eta^y + \nabla_k u_{s,y}(x)|^m +$$
$$+ 5^m c\varepsilon |\nabla_k u(x)|^m + 10^m c\varepsilon^{1-m} |\nabla_k(u-u^\varepsilon)(x)|^m + 5^m c\varepsilon^{1-m} |g_{s,y}(x)|^m.$$

Тогда, используя равенство $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+1}(y+z)$, неравенства $t \geqslant \varepsilon^{-1} b_\varepsilon^m$ и (38), получаем

$$\int\limits_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x, \nabla_k v_s^t)\,dx \leqslant \int\limits_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x, \eta^y + \nabla_k u_{s,y})\,dx +$$
$$+ 5^m c\varepsilon \int\limits_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} |\eta^y + \nabla_k u_{s,y}|^m\,dx + 5^m c\varepsilon \int\limits_{Q_t(y+z)} |\nabla_k u|^m\,dx +$$
$$+ 10^m c\varepsilon^{1-m} \int\limits_{Q_t(y+z)} |\nabla_k(u-u^\varepsilon)|^m\,dx + \left(1 + 2^m \frac{(c'')^m}{\operatorname{mes}\lambda}\right) \cdot 5^m \mu^m c\varepsilon t^{-n}.$$

Отсюда и из (34), (35), (8) следует, что

$$\sum_{y\in Y'_{t,z}(\lambda)} \int\limits_{Q_t(y+z)\cap\Omega_s} f_s(x, \nabla_k v_s^t)\,dx \leqslant I_\lambda^f(u) + 5^m(0{,}7 + c^2 + (c'')^m) c'\varepsilon.$$

Из этого неравенства и (37) выводим, что

$$I_{\lambda,s}(v_s^t) \leqslant I_\lambda^f(u) + c'''\varepsilon, \tag{39}$$

где $c''' = 5^m(1 + c^2 + (c'')^m) c'$.

Подведем итог проведенной части доказательства теоремы. Во-первых, из (30), учитывая второе из соотношений (27) и произвольность ε, получаем

$$\varliminf_{s\to\infty} I_{\lambda,s}(u_s) \geqslant I_\lambda^f(u). \tag{40}$$

Далее приходим к следующему выводу. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется $t'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что при любом $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t'_\varepsilon$ существуют $s'_t \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{v_s^t\}$, обладающие такими свойствами: $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s^t \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и справедливо неравенство (36); $\forall s \geqslant s'_t$ справедливо неравенство (39). Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ существуют $s''_i \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_s^i\}$, такие, что $\forall s \in \mathbb{N}$ $w_s^i \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и

$$\|w_s^i - q_s u\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \leqslant i^{-1}; \tag{41}$$

$$\forall s \geqslant s''_i \quad I_{\lambda,s}(w_s^i) \leqslant I_\lambda^f(u) + i^{-1}. \tag{42}$$

Положим для любого $i \in \mathbb{N}$ $s_i = i + \max\limits_{1\leqslant l\leqslant i} s''_l$. Ясно, что $\{s_i\}$ — возрастающая последовательность. Пусть теперь $\{w_s\}$ — такая последовательность, что $w_s = q_s u$, если $s < s_1$; $w_s = w_s^i$, если $s_i \leqslant s < s_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и в силу (41), (42)

$$\lim_{s\to\infty} \|w_s - q_s u\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0, \quad \varlimsup_{s\to\infty} I_{\lambda,s}(w_s) \leqslant I_\lambda^f(u). \tag{43}$$

Из последнего неравенства и (1) следует

$$\sup_s \|\nabla_k w_s\|_{L^m(\lambda\cap\Omega_s)} < \infty. \tag{44}$$

Теперь из (43), (44) и неравенства (40), учитывая, что оно справедливо для любой последовательности $\{u_s\}$, удовлетворяющей соотношениям (27), получаем

$$\lim_{s\to\infty} I_{\lambda,s}(w_s) = I_\lambda^f(u). \tag{45}$$

Покажем, что неравенство (40) верно для последовательности $\{u_s\}$, удовлетворяющей только первому из соотношений (27). Действительно, пусть $\{u_s\}$ — такая последовательность и A — множество предельных точек последовательности $\{I_{\lambda,s}(u_s)\}$. Возьмем $a \in A$. В силу (1) $a \neq -\infty$. Если $a = +\infty$, то $a > I_\lambda^f(u)$. Если $a \in \mathbb{R}$, то существует возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$, такая, что $I_{\lambda,s_j}(u_{s_j}) \to a$. Следовательно, в силу (1)

$$\sup_j \|\nabla_k u_{s_j}\|_{L^m(\lambda\cap\Omega_{s_j})} < \infty.$$

Тогда для последовательности $\{\bar{u}_s\}$, такой, что $\bar{u}_s = u_s$, если $s = s_j$ при некотором j, $\bar{u}_s = q_s u$, если $s \neq s_j$ ни при каком j, справедливы соотношения (27) и, следовательно, неравенство (40), из которого получаем, что $a \geqslant I_\lambda^f(u)$. Теперь ясно, что для последовательности $\{u_s\}$ справедливо неравенство (40). Окончательно делаем вывод о Г-сходимости последовательности $\{I_{\lambda,s}\}$ к функционалу I_λ^f. А так как λ — произвольный элемент из Λ, то теорема доказана.

5. В этом пункте при некоторых предположениях доказывается, что из Г-сходимости последовательностей $\{I_{\lambda,s} : s \in \mathbb{N}\}$ следует сходимость последовательностей $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$, а также устанавливается критерий Г-сходимости последовательностей $\{I_{\lambda,s} : s \in \mathbb{N}\}$. Определение сильной связанности последовательности пространств $W^{k,m}(\Omega_s)$ с пространством $W^{k,m}(\Omega)$ см. в [5]. В доказательстве теоремы 2 используется следующее обозначение: если $\eta \in \mathbb{R}_{n,k}''$, то u_η — функция на Ω, такая, что $\forall x \in \Omega$

$$u_\eta(x) = \sum_{\alpha\in P_{n,k}''} \frac{1}{\alpha!}\eta_\alpha x^\alpha.$$

Теорема 2. Пусть последовательность $\{W^{k,m}(\Omega_s)\}$ сильно связана с пространством $W^{k,m}(\Omega)$, $a > 0$ и

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \varliminf_{s\to\infty} \operatorname{mes}(\lambda \cap \Omega_s) \geqslant a \operatorname{mes}\lambda. \tag{46}$$

Пусть $f \in \mathcal{F}$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Г-сходится к функционалу I_λ^f. Тогда существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль, такое, что последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к f на $(\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}_{n,k}''$.

Доказательство. Прежде всего докажем следующее утверждение: если $y \in \Omega$, $t \in \mathbb{N}$, $Q_t(y) \subset \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}_{n,k}''$, то

$$\left|\int_{Q_t(y)} (f(\cdot,\eta) - f(\cdot,\eta'))\,dx\right| \leqslant 2^{m+1}c(1+|\eta|+|\eta'|)^{m-1}|\eta-\eta'|\,t^{-n}. \tag{47}$$

Пусть $y \in \Omega$, $t \in \mathbb{N}$, $Q_t(y) \subset \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}_{n,k}''$. Будем считать, что $\eta \neq \eta'$. Положим $\tau = (1+|\eta|+|\eta'|)^{-1}|\eta-\eta'|$ и $\lambda = Q_t(y)$. Так как $\lambda \in \Lambda$, то согласно условию теоремы последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Г-сходится к функционалу I_λ^f. Тогда в силу (2) и [5, свойство 2] функционал I_λ^f выпуклый на $W^{k,m}(\Omega)$. Следовательно,

$$I_\lambda^f(u_\eta) \leqslant (1-\tau)\,I_\lambda^f(u_{\eta'}) + \tau I_\lambda^f(u_{\eta'} + \tau^{-1}(u_\eta - u_{\eta'})).$$

Отсюда, используя (3), находим

$$\int_\lambda (f(\cdot,\eta) - f(\cdot,\eta'))\,dx \leqslant 2^{m+1}c(1+|\eta|+|\eta'|)^{m-1}|\eta-\eta'|\,t^{-n}. \tag{48}$$

Такую же оценку получаем и для интеграла по λ от функции $f(\cdot,\eta')$ —

$- f(\cdot, \eta)$. Так что модуль левой части неравенства (48) не превосходит правой части. Тем самым предложение (47) доказано.

Пусть теперь H — счетное всюду плотное множество в $\mathbb{R}''_{n,k}$. Ясно, что для любого $\eta \in H$ $f(\cdot, \eta) \in L^1(\Omega)$ и существует множество $E_\eta \subset \Omega$ меры нуль, такое, что

$$\forall y \in \Omega \setminus E_\eta \lim_{t\to\infty} t^n \int_{Q_t(y)} f(\cdot, \eta)\, dx = f(y, \eta). \tag{49}$$

Кроме того, поскольку $f \in \mathcal{F}$, то существует множество $E' \subset \Omega$ меры нуль, такое, что $\forall y \in \Omega \setminus E'$ функция $f(y, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}''_{n,k}$. Положим $E = \bigcup_{\eta\in H} E_\eta \cup E'$. Тогда $E \subset \Omega$ и $\operatorname{mes} E = 0$.

Зафиксируем $(y, \eta) \in (\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}''_{n,k}$ и пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Используя предложение (47) и (49), устанавливаем: существует $t_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что $\forall t \geqslant t_\varepsilon$ $\overline{Q_t(y)} \subset \Omega$ и

$$\left| t^n \int_{Q_t(y)} f(\cdot, \eta)\, dx - f(y, \eta) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{50}$$

Зафиксируем $t \geqslant t_\varepsilon + \varepsilon^{-1}$ и положим $\lambda = Q_t(y)$. Так как $\lambda \in \Lambda$, то согласно условию теоремы последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Γ-сходится к функционалу I^f_λ. Тогда существует последовательность $\{w_s\}$, такая, что $\forall s \in \mathbb{N}$ $w_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s - q_s u_\eta \|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} I_{\lambda,s}(w_s) = I^f_\lambda(u_\eta). \tag{51}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s = w_s - q_s u_\eta$. Из равенств (51) следует, что при $s \geqslant s'$ $v_s \in V_{t,r,s}(y)$ и

$$\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \eta + \nabla_k v_s)\, dx \leqslant \int_{Q_t(y)} f(\cdot, \eta)\, dx + \varepsilon t^{-n}.$$

Тогда, учитывая (50), получим, что при $s \geqslant s'$ $F_{t,r,s}(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) + 2\varepsilon$. Следовательно,

$$F''_t(y, \eta) \leqslant f(y, \eta) + 2\varepsilon. \tag{52}$$

Пусть теперь $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant t^{2km+m}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\varphi_s \in V_{t,r,s}(y), \tag{53}$$

причем

$$\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \eta + \nabla_k \varphi_s)\, dx \leqslant t^{-n} F_{t,r,s}(y, \eta) + \varepsilon t^{-n}. \tag{54}$$

Из (54), (1) и (4) вытекает, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |\nabla_k \varphi_s|^m\, dx \leqslant 2^{m+2} c^2 (1 + |\eta|^m)\, t^{-n}. \tag{55}$$

Возьмем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами: $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ на Ω, $\varphi = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi = 0$ вне $Q_t(y)$, $\forall \alpha \in P'_{n,k} \cup P''_{n,k}$ $|D^\alpha \varphi| \leqslant C t^{2|\alpha|}$ на Ω, и положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $\psi_s = \varphi_s q_s \varphi$. Положим еще $\mu = |P'_{n,k}| + |P''_{n,k}|$, $\mu_1 = C\mu^2 (k!)^n$, $\mu_2 = 6^{m+2} c^3 n (1 + |\eta|^m)$. Используя свойства функции φ, соотношения (53) — (55) и неравенства (1), (2), устанавливаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\| \psi_s \|^m_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \leqslant \mu_1^m t^{2km-n} r^{-1}, \tag{56}$$

$$\| \psi_s \|^m_{W^{k,m}(\Omega_s)} \leqslant \mu_2 \mu_1^m t^{2km-n}, \tag{57}$$

$$I_{\lambda,s}(q_s u_\eta + \psi_s) \leqslant t^{-n} F_{t,r,s}(y, \eta) + \mu_2 (1 + \mu_1^m)\, \varepsilon t^{-n}. \tag{58}$$

Сильная связанность последовательности пространств $W^{k,m}(\Omega_s)$ с пространством $W^{k,m}(\Omega)$ и неравенство (57) позволяют заключить, что существуют последовательность $\{\tilde{\psi}_s\} \subset W^{k,m}(\Omega)$ и постоянная $c' > 0$, такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$q_s \tilde{\psi}_s = \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s, \tag{59}$$

$$\|\tilde{\psi}_s\|^m_{W^{k,m}(\Omega)} \leqslant c'(1 + t^{2km-n}) \tag{60}$$

(c' выражается через m, μ_1, μ_2 и константу из условия сильной связанности рассматриваемых пространств). Далее, в силу определения числа $F'_{t,r}(y, \eta)$, существует возрастающая последовательность $\{s_l\} \subset \mathbb{N}$, такая, что $\forall\, l \in \mathbb{N}$

$$F_{t,r,s_l}(y, \eta) \leqslant F'_{t,r}(y, \eta) + \varepsilon. \tag{61}$$

Положим для любого $l \in \mathbb{N}$ $g_l = \tilde{\psi}_{s_l}$. В силу (60) существуют возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $v^r \in W^{k,m}(\Omega)$, такие, что

$$g_{l_i} \to v^r \text{ слабо в } W^{k,m}(\Omega). \tag{62}$$

Отсюда и из (60) следует, что

$$\|v^r\|^m_{W^{k,m}(\Omega)} \leqslant c'(1 + t^{2km-n}). \tag{63}$$

Получим оценку и для $\|v^r\|_{W^{k-1,m}(\Omega)}$. Прежде всего заметим, что из условия (46) вытекает неравенство

$$\varliminf_{s\to\infty} \|q_s v^r\|^m_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \geqslant a\|v^r\|^m_{W^{k-1,m}(\Omega)}. \tag{64}$$

Но в силу (59), (56) и (62) левая часть неравенства (64) не превосходит правой части (56). Следовательно,

$$\|v^r\|^m_{W^{k-1,m}(\Omega)} \leqslant \mu_1^m t^{2km-n}(ar)^{-1}. \tag{65}$$

Рассмотрим последовательность $\{\chi_s\}$, такую, что $\chi_s = q_s u_\eta + \psi_s$, если $s = s_{l_i}$ при некотором i, $\chi_s = q_s(u_\eta + v^r)$, если $s \neq s_{l_i}$ ни при каком i. Из (59) и (62) следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \|\chi_s - q_s(u_\eta + v^r)\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} = 0.$$

Тогда в силу Г-сходимости последовательности $\{I_{\lambda,s}\}$ к функционалу I^f_λ $\varliminf_{s\to\infty} I_{\lambda,s}(\chi_s) \geqslant I^f_\lambda(u_\eta + v^r)$. Отсюда и из (58), (61) вытекает, что

$$I^f_\lambda(u_\eta + v^r) \leqslant t^{-n} F'_t(y, \eta) + [\mu_2(1 + \mu_1^m) + 2]\varepsilon t^{-n}. \tag{66}$$

Итак, можно сделать вывод: существует последовательность $\{v^r\} \subset$ $\subset W^{k,m}(\Omega)$, такая, что для любого $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant t^{2km+m}$, справедливы неравенства (63), (65), (66). Из (63) и (65) следует, что $v^r \to 0$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Тогда, используя выпуклость функционала I^f_λ на $W^{k,m}(\Omega)$, из (66) и (50) получаем

$$f(y, \eta) \leqslant F'_t(y, \eta) + (1 + \mu_1^m)(\mu_2 + 3)\varepsilon.$$

Отсюда и из (52), учитывая, что $F'_t(y, \eta) \leqslant F''_t(y, \eta)$, выводим неравенства

$$|F'_t(y, \eta) - f(y, \eta)| \leqslant (1 + \mu_1^m)(\mu_2 + 3)\varepsilon, \quad |F''_t(y, \eta)| - f(y, \eta)| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \mu_1^m)(\mu_2 + 3)\varepsilon.$$

Эти неравенства позволяют заключить, что последовательности чисел $F'_t(y, \eta)$ и $F''_t(y, \eta)$ сходятся к $f(y, \eta)$. А поскольку (y, η) — произвольный элемент из множества $(\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}''_{n,k}$, то последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к f на $(\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}''_{n,k}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть выполняется условие:

А) существуют постоянная $\nu > 1$, конечные множества J_s $(s \in \mathbb{N})$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ j \in J_s)$, такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N}\, \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B_s^j;$$

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0; \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall j \in J_s \quad 2(\nu - 1)\, r_s^j < \rho_s^j,$$

где B_s^j — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j; ρ_s^j — расстояние от B_s^j до множества $\bigcup_{J_s \ni l \neq j} B_s^l \cup \partial\Omega$.

Тогда последовательность $\{W^{k,m}(\Omega_s)\}$ сильно связана с пространством $W^{k,m}(\Omega)$ и выполняется условие (46), причем $a = 1 - \nu^{-n}$.

Учитывая это замечание, из теорем 1 и 2 получаем следующий критерий Г-сходимости рассматриваемых функционалов.

Теорема 3. Пусть выполняется условие А) и $f \in \mathcal{F}$. Для того чтобы при любом $\lambda \in \Lambda$ последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Г-сходилась к функционалу I_λ^f, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{F_t'\}$ и $\{F_t''\}$ сходились к f на $(\Omega \setminus E) \times \mathbb{R}_{n,k}''$, где $E \subset \Omega$, $\operatorname{mes} E = 0$.

Замечание 2. Отметим различие в определении чисел $F_{t,r,s}(y, \eta)$ и соответствующих чисел из [6]. В основном оно заключается во введении изменяющегося параметра r, что позволило обойтись без требования коэрцитивности и гладкости функции f в теореме 2. При доказательстве теоремы 1 оказались полезными некоторые идеи работ [7, 8].

1. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.— 1975.— **58**, N 6.— P. 842—850.
2. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 3.— С. 524—528.
3. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 5.— С. 961—998.
4. *Ковалевский А. А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 8.— С. 6—9.
5. *Ковалевский А. А.* О связанности подмножеств соболевских пространств и Г-сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейн. граничн. задачи.— 1989.— Вып. 1.— С. 48—54.
6. *Ковалевский А. А.* Вопросы сходимости и усреднения для интегральных функционалов, связанных с областями сложной структуры: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1985.— 16 с.
7. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб.— 1978.— **106**, № 4.— С. 604—621.
8. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Там же.— 1977.— **103**, № 4.— С. 614—629.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 27.11.90